

6. Derived Category and Canonical Bundle - II

後半

6.3 Nefness under derived equivalence

6.3-2 $X, Y: \text{sm. proj. var.}/\mathbb{C}$, $\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X) \simeq D^b(Y)$ is derived.

Prop. 6.15 (Kawamata)

$$\omega_X: \text{nef} \iff \omega_Y: \text{nef}$$

$$\omega_X^\vee: \text{nef} \iff \omega_Y^\vee: \text{nef}$$

prf.

$$\omega_X: \text{nef}$$

$$\omega_Y: \text{nef}$$

$$\iff \text{Lem. 6.27.} \iff$$

$$q^*\omega_X: \text{nef}$$

$$p^*\omega_Y: \text{nef}$$

$$\iff \text{by def} \iff$$

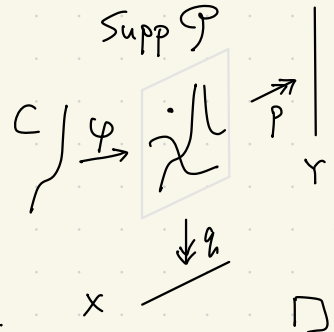
$$\forall \varphi: \overset{\text{curve}}{C} \rightarrow \text{Supp } \mathcal{P},$$

$$\forall \varphi: \overset{\text{curve}}{C} \rightarrow \text{Supp } \mathcal{P},$$

$$\deg_c(\varphi^*p^*\omega_X) \geq 0 \iff \deg_c(\varphi^*p^*\omega_Y) \geq 0$$

$$\deg_c(\varphi^*p^*\omega_X) \stackrel{\text{Lem. 6.6}}{=} \deg_c(\varphi^*p^*\omega_Y)$$

$\omega_X^\vee \neq \text{same}$



Lemma 6.27

Let $\pi: Z \rightarrow X$ be a projective morphism of proper schemes and $L \in \text{Pic}(X)$.

i) If L is a nef line bundle on X then $\pi^*(L)$ is nef.

ii) If π is surjective, then L is nef if and only if $\pi^*(L)$ is nef.

$$\text{Cor. 6.16 } \omega_X \equiv 0 \iff \omega_Y \equiv 0$$

(numerically trivial)

prf. $L \equiv 0 \iff L: \text{nef} \hookrightarrow L^\vee: \text{nef}$ (cf. Rmk 6.29 $\in \mathbb{N}^*$, by def) $\square$

Rmk. (def. 6.28)

$$\nu(X, L) := \max \left\{ m \mid \exists W \subseteq X, (L|_W^m \cdot W) = 0 \right\}$$

$$\nu(X) := \nu(X, \omega_X) : \text{numerical kodaira dim.}$$

$$\nu(X, L)^\star = \nu(X, L^r) \quad (r > 0) \quad \text{because } (\because (\cdot) \text{ is additive}) \quad (rL, \cdot) = r(L, \cdot)$$

Prop. 6.18 (Kawamata)

$$\nu(X) = \nu(Y)$$

prf. $Z \hookrightarrow \text{Supp } \mathcal{P} \xrightarrow{p} Y : \text{surj and } Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{H}^i \in \mathbb{R}_2$.

[Lem. 6.9]

$\Rightarrow$ 存在 $r > 0$,
 $\Rightarrow$ 同型になる.

$$\begin{array}{c} \mu^* p^* \omega_Y^r \\ \parallel \\ \mu^* q^* \omega_X^r \end{array}$$

$\tilde{Z}$

$\mathcal{P}$

$\xrightarrow{\mu}$
 有限射
 proj.

$\text{Supp } \mathcal{P}$

Z

$\xrightarrow{p}$
 Y

ω_Y^r

$\downarrow q$
 X

ω_X^r

Lemma 6.30

Let $\pi : Z \rightarrow X$ be a projective morphism of projective schemes and $L \in \text{Pic}(X)$.

i) Then $\nu(X, L) \geq \nu(Z, \pi^* L)$.

ii) If $\pi : Z \rightarrow X$ is surjective, then $\nu(X, L) = \nu(Z, \pi^* L)$.

$$\nu(X)^\star = \nu(X, \omega_X^r) \xrightarrow{\downarrow} \nu(\tilde{Z}, \mu^* p^* \omega_Y^r)$$

|| 6.9

$$\nu(Y)^\star = \nu(Y, \omega_Y^r) = \nu(\tilde{Z}, \mu^* q^* \omega_X^r)$$

□

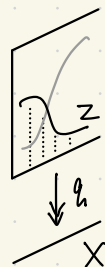
6.4 Derived equivalence versus birationality

Q. 「導来同値なら双有理同値」みたいなのを言いたい.

[Setting] X, Y : sm. proj. var. / k : alg. cl. $\text{ch} = 0$.
 $\Phi_D: D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$. $X \xleftarrow{q} X \times Y \xrightarrow{p} Y$.

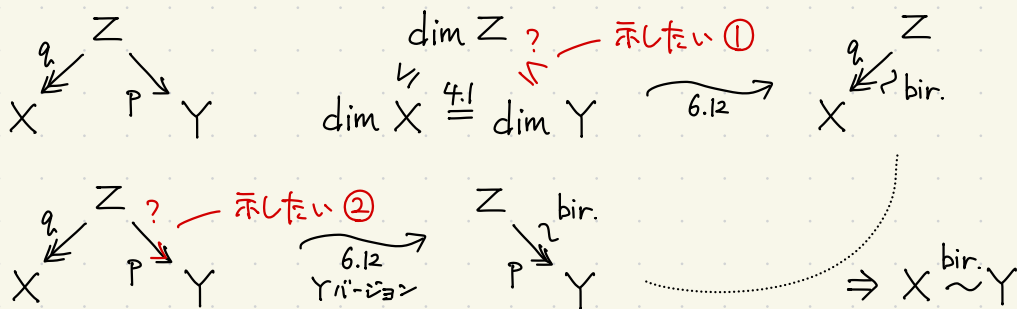
6.5

ある $Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{P}$ があり, $q_*(Z) = X$.



6.12

さらに $\dim Z = \dim X$ なら $q: Z \xrightarrow{\text{bir.}} X$.



[ETS.] $Z \xrightarrow{p} Y$: generically finite

☺ $\dim Z \leq \dim Y$ は直ち① かつ $\dim Z = \dim Y$ なら、
 gen. fin. かつ $\dim p(Z) = \dim Y$. p : proper $\in Y$: irr. かつ p : surj.②

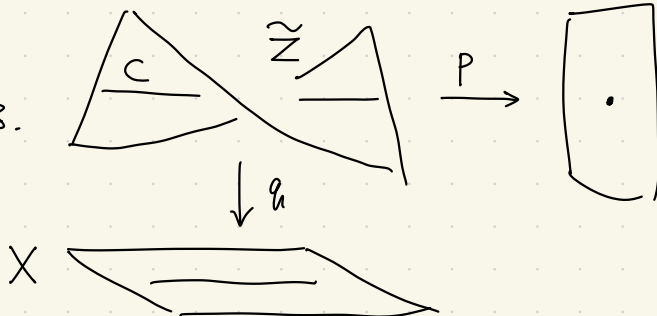
（今回は合成 $\tilde{Z} \rightarrow Z \xrightarrow{p} Y$ かつ generically finite であることを示す。
 正規化は全射双有理なので十分.

Q. [ETS.] $\tilde{Z} \xrightarrow{p} Y$: generically finite はどう示すか?

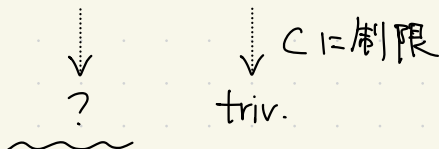
↓ $\because$ 必ずお持ち "pで潰れる曲線 少ない."

$$p(C) = \{pt\} \text{ とする.}$$

曲線



$$6.9 \quad \exists r, \quad q^* \omega_X^r \cong p^* \omega_Y^r.$$



こいつが何らかの positivity を持たさ矛盾.

(ω_X : ample を仮定すれば $q|_C$: fin. より直ちに $\because$ で終了.
もっと弱い仮定で 考えてみる.

ω_X : big (つまり $kod = \dim$, $h^0(X, \omega_X^{\otimes k})$ が $\mathbb{Q}^{\dim X}$ に増大

小平の補題 D : big $\iff \mathbb{Q} \gg 0$ で $\mathbb{Q}D = \text{ample} + \text{effective}$.

"この eff. div. が定め子開部分スキームの外では
 ample として扱える". $\leadsto$ generic にはこれでよい.

↑ $\because$ までお持ち

$L : \text{big}$ $\xLeftrightarrow[\text{(属関)}]{\text{def}}$ $\text{kod}(X, L) = \dim X$ (Rmk. 常に $\text{kod} \leq \dim$)
 $\xLeftrightarrow{\text{巨大}}$ $\dim H^0(X, L^d)$ が $d^{\dim}$ のオーダーで増大

Rmk.

ample $\Rightarrow$ big. $\odot L^m = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$: very ample ならば $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に取れる.

$$\dim H^0(X, (L^m)^d) = \chi(X, \mathcal{O}_X(d)) = \frac{\deg X}{(\dim X)!} d^{\dim X} + \dots$$

Serre/Van. def. of deg (Hilb. poly.)

この差はどのくらいか?

Lem. (Kodaira) X : proj. normal var. L : Cartier div. on X

$$L : \text{big} \iff \begin{array}{l} \exists d, \exists A : \text{ample Cartier div.} \\ \exists E : \text{effective Cartier div.} \\ \text{s.t. } dL = A + E \end{array}$$

川又「高次元代数多様体論」Thm. 1.5.7(1)

prf.

$\Leftarrow$: 上の Rmk. 通り OK.

$\Rightarrow$: X 上の very ample div. H をとる.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{O}(-H) & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O}_H \rightarrow 0 \\ & & & & & & \uparrow \cong H^0(L^d \otimes -) \\ 0 & \rightarrow & H^0(L^d(-H)) & \rightarrow & H^0(L^d) & \rightarrow & H^0(L^d|_H) \end{array}$$

$\underbrace{\quad}_{d^{\dim X} \text{ 次}} \geq \underbrace{\quad}_{d^{\dim H} \text{ 次以下}} \quad \left. \vphantom{\frac{d^{\dim X}}{d^{\dim H}}}\right\} \text{次元仮定}$

$\leadsto L^d(-H)$ は $d \gg 0$ で大域切断をもつ.

: effective.

□

Pro. 6.19. (Kawamata) X, Y : sm. proj. var. / k : alg. cl. $ch=0$.
 ω_X : (anti-) big

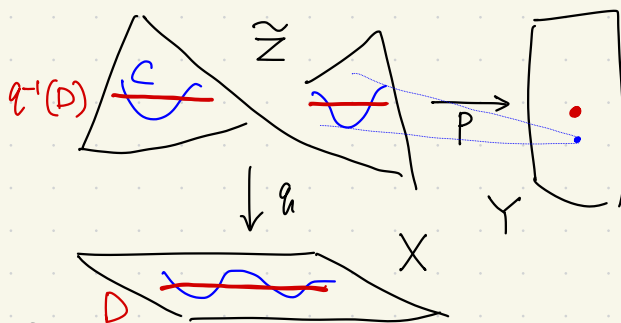
$$D^b(X) \simeq D^b(Y) \nLeftrightarrow X \stackrel{\text{bir.}}{\sim} Y$$

prf. $\Phi_{\mathcal{Q}} : D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y)$. $Z \subseteq \text{Supp } \mathcal{Q} \xrightarrow{q} X$ は全射だとする.

Lem. (Kodaira) $\exists \omega_X^d = \mathcal{O}_X(H+D)$ なる H : ample
 D : effective $\exists$ 取る

ETS. $\tilde{Z} \setminus q^{-1}(D) \xrightarrow{p} Y$ は
 $\exists$ 1代-有限である.

($\odot$) $\tilde{Z} \setminus q^{-1}(D) \stackrel{\text{dense open}}{\subseteq} \tilde{Z}$.
 $(\tilde{Z} \setminus q^{-1}(D))_{\eta} \stackrel{\text{dense open}}{\subseteq} \tilde{Z}_{\eta}$.
 ETS を示せた $\text{fin} \Rightarrow \text{fin: 7 3'}$
 $\tilde{Z} \rightarrow Y$: gen. fin.



$C \subseteq \tilde{Z} \ (C \not\subseteq q^{-1}(D))$ 仮 $p(C) = \text{pt}$ と仮定.

$$(Y \text{ 側}) \deg_C(p^* \omega_Y|_C) = 0$$

$$\begin{aligned} (X \text{ 側}) \deg_C(q^* \omega_X|_C) &= \deg_C(q^* \mathcal{O}(H+D)|_C) && q(C) \cap D : \text{有限点} \text{ かつ} \\ &= \deg_C(q^* \mathcal{O}(H)|_C \otimes q^* \mathcal{O}(D)|_C) && \text{== 体 } C \text{ 上 ==} \\ &\geq \deg_C(q^* \mathcal{O}(H)|_C) && \text{有効因子で定まる.} \\ &> 0 && \text{H: ample なら, } p \text{ は constant なら} \\ &&& C \xrightarrow{q} X \text{ は有限射 だとする.} \\ &&& q^* H : \text{ample.} \end{aligned}$$

たの $p^* \omega_Y \cong q^* \omega_X$ は矛盾.

□

Pro. 6.19. (Kawamata) 続き

上の $\tilde{\Sigma}$ において $q^* \omega_X \cong p^* \omega_Y$.

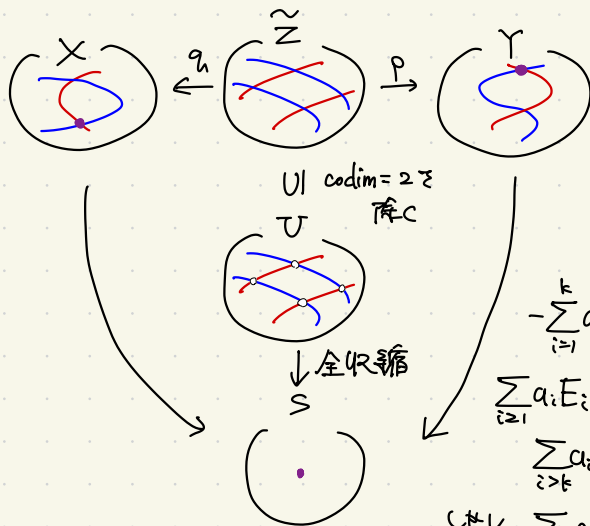
prf.

[Kollar 森 Rmk. 2.23]

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow[q]{q} & \tilde{\Sigma} & \xrightarrow[p]{p} & Y \\
 \omega_X & \text{bir.} & \text{proper bir.} & \text{bir.} & \omega_Y \\
 & & \uparrow \tau & & \\
 & & W : \text{sm.} & &
 \end{array}$$

$$q^* \omega_X + \sum a_i E_i = \omega_W = p^* \omega_Y + \sum a'_i E'_i$$

$$\begin{array}{ccc}
 r \sum a_i E_i & \xrightarrow{\text{lin.}} & r \sum a'_i E'_i
 \end{array}$$



1乗すれば正しいことは知っているが、
なんと r 乗せずに正しい。

$L \in \text{Pic } \tilde{\Sigma}$ かつ $\tau^* L \cong \mathcal{O}_W$ なる。

$$L = L \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}} \xrightarrow{\text{Ha の ZMT の}} L \otimes \tau_* \mathcal{O}_W$$

$$= \tau_* (\tau^* L \otimes \mathcal{O}_W) \quad \text{同商体で}$$

$$= \tau_* \mathcal{O}_W \quad \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}} : \text{正則}$$

$$= \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}} \quad \tau_* \mathcal{O}_W : \text{f.g. } \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}} \text{ mod } \mathfrak{m}$$

$$[ETS] \sum a_i E_i \xrightarrow{\text{lin.}} 0 \Rightarrow \forall a_i = 0$$

$$\begin{cases} a_i < 0 & i \leq k \\ a_i > 0 & i > k \end{cases}, k > 0 \text{ 存在する。}$$

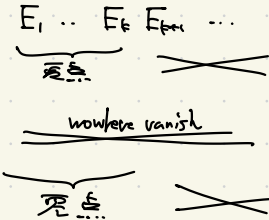
$$-\sum_{i=1}^k a_i E_i \ni s \quad \text{eff.}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i E_i \sim 0 \ni t \quad \text{eff.}$$

$$\sum_{i > k} a_i E_i \ni st \quad \text{eff.}$$

しかし $\sum_{i \neq k} a_i E_i$ の大域切断は $E_{k+1}, \dots$ に沿ってのみ

零をもつ生成元 u の定数倍の必要がある。



☺ $\mathcal{O}(\sum_{i \neq k} a_i E_i)$ の大域切断 v をとると、 u : 生成元より $\frac{v}{u}$ は S において

u の零の外 i.e. E_i たちを収縮先 ($\text{codim} \geq 2$) の外で正則関数であり

Hartogs より定数。よって $v = (\text{const}) u$.

Σ

□

$$X \simeq Y \text{ \ߝ } K\text{-equivalent} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{array}{ccc} & \exists Z & \\ \text{bir.} \swarrow q & & \searrow p \text{ bir.} \\ X & & Y \end{array} \text{ s.t. } q^* \omega_X \cong p^* \omega_Y$$

Prop.6.19 (言い換え) $D\text{-eq} \Rightarrow K\text{-eq}$ if $\omega_X : \text{big}$.

big の仮定なしでは ~~嘘~~.

Conj. $K\text{-eq} \Rightarrow D\text{-eq}$.